Hilesiz bir para ile n kere yazı tura atıyoruz. Elde ettiğimiz n'lik dizide iki tane yazı(Y)'nin veya tura (T)'nin yan yana gelmemesi olasılığı nedir?

Çözüm için Birkaç açıklamayla başlayalım: sorunun yan yana iki tura ya da yanyana iki yazının yan yana gelmemesi olarak sorulması sonucu değiştirmeyecektir. Bu oldukça açık ama gene de söylemiş olalaım.
İkincisi, problem, tüm olasılık problemlerinin çözümünde olduğu gibi, aradığımız sonuçların ve toplam sonuçların sayılarını bulup ilkini ikinciye bölerek, olasılığı hesaplayacağız.
Hatırlatmış olayım, herhangi bir deneyde, olabilecek bütün durumları içine alan kümeye **örnek uzay** diyoruz ve **E** ile gösteriyoruz. Bir bakıma deney sonuçlarının evrensel kümesi.
Örnek uzayı oluşturan, ve olası bir deney sonucunu ifade eden duruma ise **olay** deniyor. O halde, ardığımız, bu soruda ortaya konulan deneyin örnek uzayı ve tercih ettiğimiz olayların sayısını bulmamız gerekiyor.

Örnek uzayın eleman sayısı, soruya cevap veren bütün arkadaşlarımız tarafından doğru bulunmuş. n elemanlı bir kümenin 2 elemanlı alt kümelerinin sayısı: 2ⁿ

Sıra olay kümesinin eleman sayısını bulmaya gelince ise, bir çok arkadaşımız hatalı hesaplamalar yapmışlar. Daha önce verdiğimiz ipucunda, n sayısı küçük iken yaptığımız gözlemlerle, olay kümesi elemanlarının sayısının, şağa kaymış Fibonacci dizisi olduğunu tespit ettiğimizi göstermiştik.
Bu bölümü **Mert Atmaca'**dan alıyoruz:

ilk önce oluşabilecek durumları atış sayılarına göre oranla inceleriz
2 atış yaptığımızda istenilen durumun 3 olduğunu görüyoruz
3 atışta 5 (=a_3)
4 atışta 8 (=a_4)
5 atışta 13 (=a_5)
6 atışta 21 (=a_6) olduğu sayılarak görülebilir biz burada n.ci atışta kaç geldiğini(n:ci atışta a^n2in kaç olduğunu-m.a) *bilmek istiyoruz, ve bir dizi kurmaya çalışacağız burada diziler arasında bağıntı $a_n=a_{n-1} + a_{n-2}$ olarak çıkar.*

Bu dizinin, Fibonecci dizisine çok benzediğini görüyoruz ama aynı olmadığı da aşikar.
Eğer F_n Fobonacci dizisinde n.ci elemanını temsil ederse, dizinin elemanları şöyle: $F_1=1$, $F_2=1$,
$F_3=2$ vs. Kural ise $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$. Göreceğimiz gibi , $a_1=F_3$, $a_2=F_4$ ... oluyor. Yani, bu sorunun olay sayılarının oluşturduğu dizi, Fibonaççi dizisinin 2 eleman sağa kaymış haline karşılık geliyor. O zaman, $a_n=F_{n+2}$ olacağını buluyoruz.
Bir kez olay kümesi elemanları sayısını Fibonacci dizisi cinsinden yazabildik mi, o zaman sonuç kolaylaşır. Bir çok arkadaşımız, eğer p_n n kere para atınca iki yazının yanyana gelmemesi olasılığı ise, $p_n=F_{n+2}/2^n$ olarak buldular. Ancak verdiğimiz ipucunda F_{n+2} sayısının nasıl hesaplanacağını söylemiştik.
Arkadaşımız **Hasan Ünlü** bu hesabı matris cebiriyle hoş bir şekilde hesaplıyor. Merak edenler için, çözümün sonuna ekliyorum.
Serhat Duran, $F_n= [((1+\sqrt{5})/2)^n-((1-\sqrt{5})/2)^n)]/ \sqrt{5}$; sonucunu internetten bulup kullandığını söylüyor. Bizim için yeterlidir. O halde
$F_{n+2}=a_n=[((1+\sqrt{5})/2)^{n+2}-((1-\sqrt{5})/2)^{n+2})]/ \sqrt{5}$ ve $p_n=[((1+\sqrt{5})/2)^{n+2}-((1-\sqrt{5})/2)^{n+2})]/ \sqrt{5} .2^n$ olarak bulunur.

Hasan Ünlü'nün çözümü:
Soruda Fibonacci kısmını genel ifade etmek için matris determinant konusundan yaralanacağız.
Fibonaccinin terimlerine F_0, F_1, F_2,…. F_n deriz. Bunu matriste aşağıdaki gibi ifade ederiz.

$$\begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{bmatrix}$$

Her seferinde $\begin{bmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{bmatrix}$ Bu matrisi açarsak ve yerine yazarsak;

$$\begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n * \begin{bmatrix} F_1 \\ F_0 \end{bmatrix}$$

Elde edilir. Şimdi $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n$ ifadesini hesaplayabilmek için öz değer ve öz vektörlerden yapacağız.
$det|A - \lambda * I| = 0$ olmalı $det\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$ buradan ikinci derece denklem gelir.
$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ $\lambda_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, olur bu değerlere karşılık elde edilen öz vektörler ise;
$(A - \lambda_1 * I) * x = 0$ bu ifade için öz vektörler elde edilecek hemen yazalım işlemi uzun çünkü;
$x = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{-(1+\sqrt{5})}{2} \end{bmatrix}$
$(A - \lambda_2 * I) * x = 0$ bu ifade için öz vektörler elde edilecek hemen yazalım işlemi uzun çünkü;
$x = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{-(1-\sqrt{5})}{2} \end{bmatrix}$ sonra bunların oluşturduğu matris ele alınır.

$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{-(1+\sqrt{5})}{2} & \frac{-(1-\sqrt{5})}{2} \end{bmatrix}$ $X^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-(1-\sqrt{5})}{2} & -1 \\ \frac{(1+\sqrt{5})}{2} & 1 \end{bmatrix} * \frac{1}{\sqrt{5}}$

$$A^n = X * \lambda^n * X^{-1}$$

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{-(1+\sqrt{5})}{2} & \frac{-(1-\sqrt{5})}{2} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} (1-\sqrt{5}/2)^n & 0 \\ 0 & (1+\sqrt{5}/2)^n \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \frac{-(1-\sqrt{5})}{2} & -1 \\ \frac{(1+\sqrt{5})}{2} & 1 \end{bmatrix} * \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Determinanttaki sadece gerekli kısımları çarparsak; gereksiz kısımlara … yazdım.

$$\begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} * \begin{bmatrix} \cdots & \cdots \\ ((1+\sqrt{5})/2)^n - ((1+\sqrt{5})/2)^n & \cdots \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

Sonuç olarak fibonaccinin genel terimini bulduk.
Sorumuz fibonacciyi 2 geriden takip ediyordu yani
n=3 iken fibonacci 5 oluyor yani F_5
n=4 iken fibonacci 8 oluyar yani F_6

...... k TANE ATIŞ İÇİN DURUMU YAZARSAK

$$olasılık = \frac{F_{k+2}}{2^k}$$

$$olasılık = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2}}{2^k * \sqrt{5}}$$

Hasan ÜNLÜ